$$(I-A)S_N=(I-A)(I+A+A^2+A^3+...+A^N)=$$
$$=(I+A+A^2+A^3+...+A^N)-(A+A^2+A^3+...+A^{N+1})=I-A^{N+1}$$

كما أن :

$$S_N(I-A)=(I+A+A^2+A^3+...+A^N)(I-A)=$$
$$=(I+A+A^2+A^3+...+A^N)-(A+A^2+A^3+...+A^{N+1})=I-A^{N+1}$$

وبالتالي :
$$S_N(I-A)=I-A^{N+1}=(I-A)S_N$$

بأخذ النهايات نجد أن :

$$\lim_{N\to\infty} S_N(I-A)=I-\lim_{N\to\infty} A^{N+1}=(I-A)\lim_{N\to\infty} S_N$$

وبما أن $\lim_{N\to\infty}\|A^{N+1}\|\le\lim_{N\to\infty}\|A\|^{N+1}=0$ وبالتالي $\lim_{N\to\infty} A^{N+1}=0$ نعوض فيما سبق

بالأخذ بعين الاعتبار أن $S=\lim_{N\to\infty} S_N$ نجد أن : $S(I-A)=I=(I-A)S$

وبالتالي $S=(I-A)^{-1}$ أي أن $(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n=I+A+A^2+A^3+...$.

بأخذ $T=\frac{1}{\lambda}A$ فنجد أن $\|T\|<1$ بالاستفادة مما سبق ونطبق ذلك على T فيكون :

$$(A-\lambda I)^{-1}=\left[(-\lambda)(I-\frac{1}{\lambda}A)\right]^{-1}=(-\lambda)^{-1}(I-\frac{1}{\lambda}A)^{-1}=$$
$$=-\frac{1}{\lambda}(I-T)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}T^n=-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n=-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$$

ب)- لتكن $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ جملة متعامدة في H ولدينا دائماً $N(A)=N(A^*)$ وبالتالي :

$$N(A)=N(A^*)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|A^*h_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\infty$$

فإذا كان $\varepsilon>0$ فيوجد $n_0=n_0(\varepsilon)>0$ بحيث : $\left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\|A^*h_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon^2$

لنأخذ المؤثر $A_\varepsilon:H\to H:A_\varepsilon x=\sum_{k=1}^{n_0}(Ax,h_k)h_k$ طالما المجموع منتهٍ فإن المؤثر A_ε

متراص فمن أجل أي عنصر $x\in H$ يكون :

$$\|Ax - A_\varepsilon x\|^2 = \left\| \sum_{k=n_0+1}^{m} \langle Ax, h_k \rangle h_k \right\|^2 = \sum_{k=n_0+1}^{m} |\langle Ax ; h_k \rangle|^2 =$$

$$\sum_{k=n_0+1}^{m} |\langle x, A^* h_k \rangle|^2 \le \sum_{k=n_0+1}^{m} \|x\|^2 \|A^* h_k\|^2 \le \varepsilon^2 \|x\|^2$$

وبالتالي :

$$\|Ax - A_\varepsilon x\|^2 < \varepsilon \|x\|$$

أي أن المؤثر متقارب من متتالية من المؤثرات المتراصة فهو متراص .

<u>جواب السؤال الثالث (٢٠ درجة) :</u>

١)- لنرمز $R_m = R(A-\lambda I)^m$, $N_m = N(A-\lambda I)^m$ وليكن $x \in X$ عنصراً اختيارياً فإن العنصر $z = (A-\lambda I)^m x \in R_m = R_{2m}$ وبالتالي $z \in R_{2m}$ أي يوجد $x_1 \in X$ بحيث $z = (A-\lambda I)^{2m} x_1$ ولنأخذ $x_0 = (A-\lambda I)^m x_1 \in R_m$ ويكون عندئذ :

$$(A-\lambda I)^m x_0 = (A-\lambda I)^{2m} x_1 = z = (A-\lambda I)^m x$$

وبالتالي $(A-\lambda I)^m (x - x_0) = 0$ وهذا يعني أن $x - x_0 \in N_m$ وبالتالي :

$$x = x - x_0 + x_0 \quad , \quad x - x_0 \in N_m \quad , \quad x_0 \in R_m$$

بقي أن نثبت أن هذا التمثيل وحيد :

نفرض وجود تمثيل آخر $u_0 \in R_m$, $x - u_0 \in N_m$, $x = x - u_0 + u_0$ وبالتالي

$v_0 = x_0 - u_0 \in R_m$ وبالتالي $v \in X$, $v_0 = (A-\lambda I)^m v$ كما أن

$$v_0 = x_0 - u_0 = (x - u_0) - (x - x_0) \;\Rightarrow\; v_0 \in N_m$$

$$(A-\lambda I)^m v_0 = 0 \;\Rightarrow\; (A-\lambda I)^{2m} v = (A-\lambda I)^m v_0 = 0$$

وبالتالي $v \in N_{2m} = N_m$ وبالتالي $v_0 = (A-\lambda I)^m v = 0$ ومنه $x_0 = u_0$ فالتمثيل وحيد .

إذاً $X = N(A-\lambda I)^m \oplus R(A-\lambda I)^m$ وهو المطلوب .

جامعة البعث كلية العلوم قسم الرياضيات	امتحانات الفصل الأول ٢٠١٥ـ٢٠١٦ أسئلة مقرر التحليل التابعي (٢) لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي	المدة : ساعة ونصف العلامة:(١٠٠) درجة الاسم :

السؤال الأول (١٠+١٠= ٢٠ درجة):

١)- أثبت أن كل مؤثر خطي و متراص هو مؤثر محدود .

٢)- ليكن A مؤثر خطي ومحدود من فضاء هيلبرت H في نفسه أثبت أن :

المؤثر A متراص $\Leftrightarrow$ مرافقه A^* متراص .

السؤال الثاني (١٠+١٠=٢٠ درجة):

أ)- ليكن A مؤثر من $L(B,B)$، أثبت إذا كان $\|A\|<1$ فإن المؤثر $(I-A)^{-1}$ موجوداً في $L(B,B)$ ،وأن $(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n$. ثم استنتج أنه إذا كان $\|A\|<|\lambda|$ عندئذ يكون $(A-\lambda I)^{-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$.

ب)- أثبت أنه إذا كان $N(A)<\infty$ عندئذ يكون المؤثر A متراصاً . ($N(A)$ نظيم هيلبرت-شميدث للمؤثر A) .

السؤال الثالث (٢٠ درجة) :

إذا كان $A:X\to X$ مؤثر متراص حيث X فضاء خطي منظم أثبت عندئذ أنه من أجل كل قيمة $\lambda\neq 0$ يوجد m بحيث يكون $X=N(A-\lambda I)^m\oplus R(A-\lambda I)^m$.

السؤال الرابع (٢٠ درجة):

أوجد القيم الخاصة والعناصر الخاصة للمؤثر : $A:\ell_2\to\ell_2$ حيث :

$$Ax=(\xi_1,\xi_2,0,0,.....)\;\;;\;x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,...)\in\ell_2$$

ثم بين فيما إذا كان المؤثر A متراص أو مؤثر إسقاط أو مؤثر موجباً .

السؤال الخامس (٢٠ درجة) : عرف شكل ثنائي الخطية المحدود ، ثم بيّن أن العلاقة :

$$F(x,y)=\langle Ax,y\rangle\;,\forall x,y\in H$$

(حيث H فضاء هيلبرت العقدي و $A\in L(H)$) تعرف شكلاً ثنائي الخطية محدوداً ، ثم أوجد نظيمه .